

非线性稳定性与奇异值的关系*

穆 穆¹ 郭 欢¹ 王佳峰¹ Li Yong²

1. LASG, 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029;

2. Joint Center for Earth System Technology, University of Maryland, Baltimore County, Maryland, USA

摘要 研究了奇异值的大小与基流的非线性稳定性和不稳定性的关系。结果表明, 它们两者之间存在很好的对应关系; 奇异值的大小随着基流的稳定性(不稳定性)加强而变小(增大)。稳定情形下最大奇异值明显小于不稳定情形下的最大奇异值。

关键词 奇异值 非线性稳定性 非线性不稳定性

大气、海洋运动本质上是非线性的, 然而, 处理非线性问题是复杂、困难的。某些情况下, 将非线性过程简化为线性在一定范围内是有效的、可行的。因而, 在有效的线性近似范围内, 奇异值、奇异向量广泛应用于理论研究和实际应用。例如可预报性^[1]和集合预报^[2]的研究。

最大奇异值的大小表示一定范数意义下, 初始扰动在有限时间段(优化时段)内所可能达到的最大增长率, 此最大奇异值对应的第一奇异向量即为增长最快的初始扰动。显而易见, 奇异值、奇异向量的概念与有限时间段内的线性稳定、不稳定问题紧密相关^[3]。另一方面, 存在若干非线性稳定性的定义^[4]; 其中有一种定义如下: 对于任一初始扰动, 无论经过多长时间的演变, 在一定范数意义下其增长率都不会超出某一常数。这种非线性稳定性的定义^[4~6]被广泛应用, 且其对应的稳定性问题也研究得比较多。

从上述奇异值和非线性稳定性的定义来看, 它们两者间应该存在着某些关系。一般而言, 非线性问题相对比较复杂, 要建立非线性稳定性的判据是比较困难的。然而, 要得到奇异值却相对容易些(至少可以通过数值的方法)。若能够得到非线性稳定性和奇异值间的关系, 就可以从奇异值中得到一些关于非线性稳定性的有用的信息。以下, 我们将利用一些特殊情形下的非线性稳定性判据^[5,6], 讨论非线性稳定性和奇异值间的关系。以二维正压准地转模式为例, 研究能量范数意义下最大奇异值的大小随基本流非线性稳定性的加强(减弱)的变化。从结果来看, 非线性稳定和不稳定基流下最大奇异值的大小间存在着明显的差异。因此, 奇异值的大小能够反映非线性稳定性、不稳定性的一些特征。

1 模式

二维正压准地转模式可写为

2000-06-05 收稿, 2000-08-14 收修改稿

* 国家重点基础研究项目“我国重大天气灾害的形成机理和预测理论研究”(No. G1998040910)、国家自然科学基金(批准号: 49775262, 49823002)和中国科学院 KZCX2-208 资助项目

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \partial(\phi, P) = 0, \quad (1)$$

其中, ϕ 为流函数; $\partial(\phi, P)$ 是二维 Jacobi 算子; 位涡 P 的表达式如下

$$P = \nabla^2 \phi - F\phi + f + \frac{f}{H}h_s, \quad (2)$$

其中, $F = \frac{f^2}{gH}$ 是 Rossby 变形半径平方的倒数; f 是 Coriolis 参数; h_s 是地形. 东、西边界取为周期的; 南、北边界取为刚壁, 即

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{y=0, 2Y} = 0. \quad (3)$$

此外, 还应满足 $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2X} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0, 2Y} dx = 0$.

将方程(1)与(2)线性化, 得到它的切线性模式^[7], 再从切线性模式写出伴随模式, 然后, 可以计算出奇异值^[8,9].

2 数值结果

我们将分析数值实验的结果, 分别讨论不考虑地形因子和考虑地形因子时, 能量范数意义下最大奇异值的大小与非线性稳定性的关系.

2.1 不考虑地形因子

我们首先讨论不考虑地形因子的情形. 基流的选取如下^[10]

$$\psi(y) = \psi_0 \cos\left(\frac{\pi l y}{2Y} + \alpha\right), \quad (4)$$

其中, $\psi(y)$ 为基本流的流函数; ψ_0 为 $\psi(y)$ 的振幅; l 为基本流的波数; Y 为南北向距离的一半; α 为位移.

这种情形的非线性稳定性判据^[5,6,10]为

$$l < 1. \quad (5)$$

由(5)式可知基流的非线性稳定性由波数 l 确定. 随着波数 l 增大(减小), 基流稳定性减弱(加强). 同时考虑到切线性模式的有效时段^[10], 在刚壁边界条件下, 非线性稳定和 unstable 基流的有效时段分别为 3 和 2 d. 因此我们在线性近似都有效的范围内(2 d), 作了一些数值实验来计算奇异值. 图 1(a)和(b)显示了优化时段分别为 24, 30, 36, 42, 48 h 的最大奇异值的大小随基流波数 l 的变化. 为了研究非线性稳定与非线性不稳定基流情形下奇异值间的不同, 我们计算了 20 个稳定的例子和 20 个不稳定的例子的最大奇异值以及它们的平均值, 结果见表 1.

表 1 稳定与不稳定基流对应的最大奇异值的均值(不考虑地形因子)

类 型	优化时段/h				
	24	30	36	42	48
稳定	1.118	1.155	1.190	1.228	1.265
不稳定	2.084	2.484	2.946	3.472	4.071

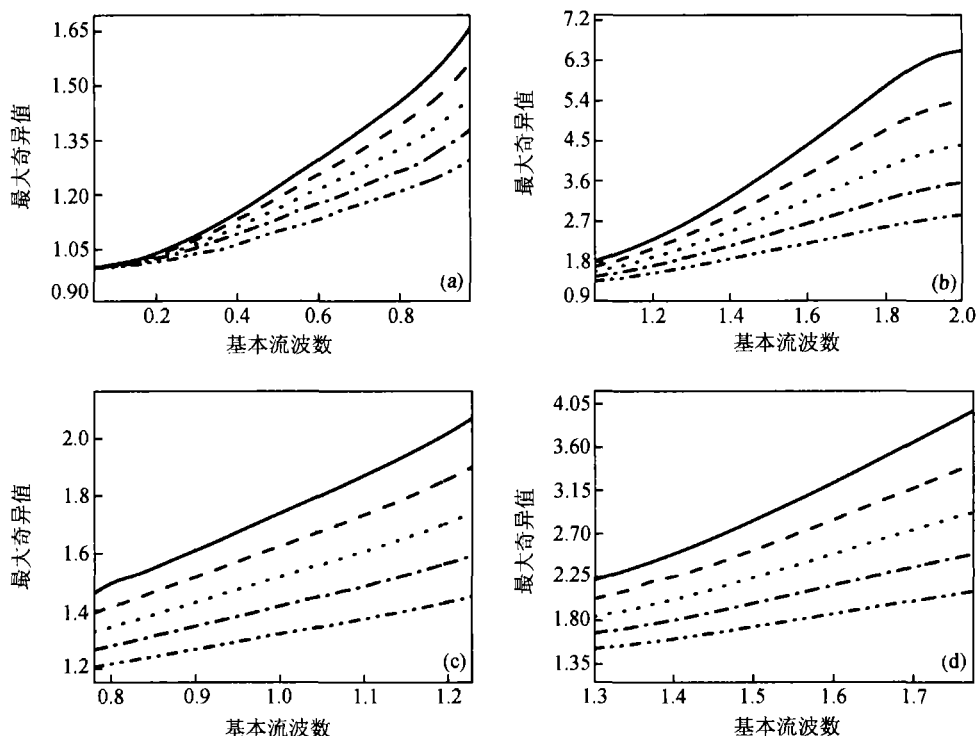


图 1 最大奇异值随基流波数 l 的变化

(a) 非线性稳定基流; (b) 非线性不稳定基流; (c) 非线性稳定基流并考虑了地形因子; (d) 非线性不稳定基流并考虑了地形因子

优化时段分别为: 48 h(实线), 42 h(虚线), 36 h(点线), 30 h(虚-点线), 24 h(虚-点-点线)

从图 1(a), (b) 和表 1, 我们可得以下结论:

- (1) 稳定情形下最大奇异值明显小于不稳定情形下最大奇异值.
- (2) 优化时段越长, 则最大奇异值越大, 而且非线性稳定、不稳定情形下的最大奇异值间的差别也越大.
- (3) 最大奇异值的大小受波数 l 的影响很大, 随着波数 l 减小(稳定性增加), 最大奇异值迅速下降.

2.2 考虑地形因子

下面讨论考虑地形因子时的情形. 基流和地形^[10]取如下形式:

基流

$$\begin{aligned} \psi(y) = & \psi_0 \left(\gamma_1 \sin\left(\frac{\pi l y}{2Y}\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{\pi l y}{2Y}\right) + A_1 \sin\left(\sqrt{\left(\frac{\pi l}{2Y}\right)^2 - \frac{f_0 h_0}{\psi_0}} y\right) \right. \\ & \left. + A_2 \cos\left(\sqrt{\left(\frac{\pi l}{2Y}\right)^2 - \frac{f_0 h_0}{\psi_0}} y\right) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

地形

$$h(y) = h_0 \left(\gamma_1 \sin\left(\frac{\pi l y}{2Y}\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{\pi l y}{2Y}\right) + 1 \right). \quad (7)$$

其中, $\psi(y)$, ϕ_0 , l 和 Y 的意义与 2.1 节相同; $h(y)$ 为地形; h_0 是地形 $h(y)$ 的振幅; γ_1, γ_2, A_1 和 A_2 为系数, 其余参数的定义见文献[10].

非线性稳定性判据^[5,6,10]如下

$$0 < \left(\frac{\pi l}{2Y}\right)^2 + F - \frac{f_0 h_0}{\phi_0} < \left(\frac{\pi l}{2Y}\right)^2 + F. \quad (8)$$

由文献[5],[6]和[10]可知基流的稳定性随波数 l 的增大而下降; 同时考虑到切线性模式的有效时段^[10](2 d), 类似于 2.1 节的作法, 图 1(c), (d) 显示优化时段分别为 24, 30, 36, 42, 48 h 的最大奇异值的大小随基流波数 l 的变化.

类似地, 我们也计算了 20 个稳定的例子和 20 个不稳定的例子的最大奇异值以及它们的平均值, 结果见表 2.

表 2 稳定与不稳定基流对应的最大奇异值的均值(考虑地形因子)

类型	优化时段/h				
	24	30	36	42	48
稳定	1.332	1.433	1.539	1.652	1.771
不稳定	1.795	2.062	2.355	2.680	3.028

从图 1(c), (d) 和表 2 同样可得类似于上一小节的结论, 但是非线性稳定、非线性不稳定情形下最大奇异值间的差别没有那么明显.

3 小结

奇异值的大小受基流非线性稳定性、不稳定性的影响很大. 随着基流不稳定性的加强、优化时段加长, 最大奇异值增大. 不稳定情形下的最大奇异值大于稳定情形下的最大奇异值, 而且, 这种差别随优化时段的加长更加明显. 这是因为, 如果优化时段比较短的话, 扰动没有得到充分发展, 各种扰动发展的增长率相差不大, 因而稳定基流和不稳定基流最大奇异值间的差别不能突出出来.

参 考 文 献

- 1 Palmer T N, et al. Singular vectors and the predictability of weather and climate. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1994, 348: 459
- 2 Buizza R. Optimal perturbation time evolution and sensitivity of ensemble prediction to perturbation amplitude. *Q J R Meteorol Soc*, 1995, 121: 1705
- 3 Molteni F, et al. Predictability and finite-time instability of the northern winter circulation. *Q J R Meteorol Soc*, 1993, 119: 269
- 4 Darry D H, et al. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Physics Reports*, 1985, 123: 1
- 5 Mu M. Nonlinear stability of two-dimensional quasi-geostrophic motions. *Geophys Astrophys Fluid Dyn*, 1992, 65: 57
- 6 Mu M, et al. On Arnold's second nonlinear stability theorem for two-dimensional quasigeostrophic flow. *Geophys Astrophys Fluid Dyn*,

- 1994, 75: 21
- 7 Lacarra J F, et al. Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, 1988, 40A: 81
 - 8 Lorenz E N. A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, 1965, XVII 3: 321
 - 9 Talagrand O, et al. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. *Q J R Meteorol Soc*, 1987, 113: 1311
 - 10 Mu M, et al. The impact of nonlinear stability and instability on the validity of the tangent linear model. *Adv in Atmos Sci*, 2000, 17: 375